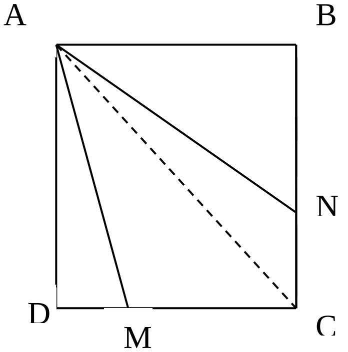
ՔԱՌԱԿՈՒՍԻ ԵՎ 45° ԱՆԿՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ս. Վ. ԱԲԱՋՅԱՆ
ֆիզմաթ գիտությունների թեկնածու
ԵՊՄՀ

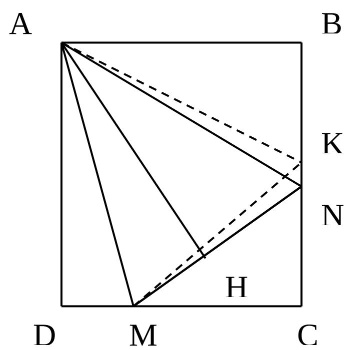
Խնդրի դրվածքը: Դիցուք $ABCD$ քառակուսու A գագաթից դուրս են գալիս երկու ճառագայթներ, որոնք միմյանց հետ կազմում են 45° անկյուն և քառակուսու կողմերը հատում են համապատասխանաբար M և N կետերում: Ստացված երկրաչափական պատկերը՝ շնորհիվ իր համաչափության օժտված է մի շարք հատկություններով, որոնցից մի քանիսին և կանդրադառնանք:

Դժվար չէ նկատել, որ M և N կետերը գտնվում են քառակուսու տարբեր կողմերի վրա: Իրոք, եթե M կետը գտնվում է DC կողմի վրա, ապա $\angle CAM < 45^\circ$ և $\angle BAM > 45^\circ$, ուրեմն N կետը գտնվում է BC կողմի վրա:

Այժմ քննարկենք ստացված երկրաչափական պատկերի որոշ հատկություններ:



նկ. 1



նկ. 2

Խնդիր 1. Որպեսզի $\angle MAN$ հավասար լինի 45° անհրաժեշտ է և բավարար, որ NM հատվածը լինի A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագծին շոշափող:

Նախ ապացուցենք բավարար պայմանը, այսինքն եթե A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագծին տարված է MN շոշափողը, ապա $\angle MAN = 45^\circ$: Իրոք, եթե տանենք $AH \perp MN$ (նկ. 2), ապա կարող ենք գրել $\Delta ADM = \Delta AMH$ և $\Delta AHN = \Delta ABN$ (ըստ ներքնաձիգի և էջի): Ուրեմն $\angle DAM = \angle MAH$ և $\angle HAN = \angle NAB$, որտեղից էլ կստանանք

$\angle MAH + \angle HAN = \angle MAN = 45^\circ$ ։ Այժմ ապացուցենք անհրաժեշտ պայմանը, այն է՝ եթե $\angle MAN = 45^\circ$, ապա MN-ը կլինի A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագծին շոշափող: Տանենք A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագծի MK շոշափողը (տես նկ. 2): Ըստ նախորդ ապացույցի $\angle MAK = 45^\circ$, այսինքն AK և AN հատվածները համընկնում են և MN կլինի տարված շրջանագծին շոշափող:

Խնդիր 2. Ապացուցել, որ $\angle DMA = \angle AMN$ և $\angle ANM = \angle ANB$ ։

Քանի որ MN-ը շոշափող է, ուրեմն ADM և AMH եռանկյունները հավասար են, որտեղից էլ կստանանք $\angle DMA = \angle AMN$ ։ Յանգունորեն կարող ենք ստանալ $\angle ANM = \angle ANB$ ։

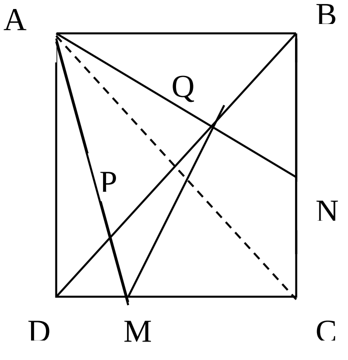
Խնդիր 3. Ապացուցել որ, MNC եռանկյան պարագիծը հաստատուն է և հավասար է քառակուսու կողմի երկարության կրկնապատիկին:

Իրոք, օգտվելով ADM և AMH եռանկյունների հավասարությունից կարող ենք գրել $HM = MD$ և $HN = NB$, ուրեմն

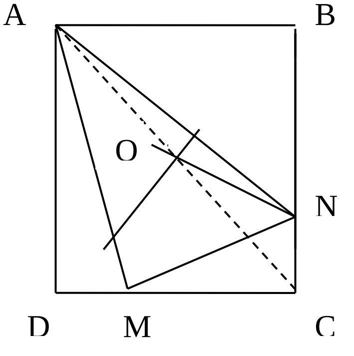
$P_{MNC} = MN + NC + MC = MH + HN + NC + MC = DC + BC = 2BC$ ։

Խնդիր 4. Դիցուք DB անկյունագիծը AM և AN հատվածները հատում է համապատասխանաբար P և Q կետերում: Ապացուցենք որ D, A, Q և M կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա և M, Q, N և C կետերը մի այլ շրջանագծի վրա (տես նկ. 3):

Իրոք, քանի որ $\angle MAN = 45^\circ, \angle BDC = 45^\circ$ (ըստ քառակուսու հատկության), ուրեմն $\angle MAN = \angle BDC$, որտեղից էլ կստանանք, որ D, A, Q և M կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Քանի որ այդ դեպքում $\angle ADM + \angle AQM = 180^\circ$ և $\angle ADM = 90^\circ$, ապա $\angle AQM = 90^\circ$, ուրեմն $\angle MQN = 90^\circ$ և $\angle MQN + \angle MCN = 180^\circ$, այսինքն $MQNC$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ:



նկ. 3



նկ. 4

Խնդիր 5. Ապացուցել , որ $AQ = QM$ և $AP = PN$ ։

Դիտարկենք AQM եռանկյունը: Քանի որ $\angle MAQ = 45^\circ$ և $\angle AQM = 90^\circ$, ապա $\angle AMQ = 45^\circ$: Այսպիսով AMQ-ն հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է՝ $AQ = MQ$: Համգունորեն կապացուցենք, որ $AP = PN$:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ M, P, Q, N և C կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա :

Քանի որ $\angle AMQ = \angle ANB = 45^\circ$, ուրեմն M, P, Q և N կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Մյուս կողմից $\angle MQN = 90^\circ$ և $\angle MCN = 90^\circ$, ուրեմն $\angle MQN$ + $\angle MCN = 180^\circ$, այսինքն $MQNC$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ: Այսպիսով M, P, Q, N և C կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա :

Խնդիր 7. Ապացուցենք, որ AMN եռանկյան արտագծված շրջանագծի O կենտրոնը գտնվում է AC անկյունագծի վրա (նկ. 4):

Տանենք AN հատվածի միջնուղղահայացը, որը AC անկյունագիծը հատում է O կետում: Կատարենք նշանակում՝ $\angle CAN = \alpha$: Դժվար չէ նկատել, որ $\angle AON = 180 - 2\alpha$ և $\angle OAN = \angle DAM$, որտեղից կստանանք $\angle AMD = 90^\circ - \alpha$: Մյուս կողմից $\angle AMD = \angle AMN$, ուրեմն $\angle AMN = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle AON$: Եթե տանենք O կենտրոնով և AO շառավղով շրջանագիծ, ապա այն կանցնի նաև M կետով, քանի որ $\angle AMN = \frac{1}{2}\angle AON$: Այսպիսով AMN եռանկյան արտագծված շրջանագծի կենտրոնը գտնվում է AC անկյունագծի վրա:

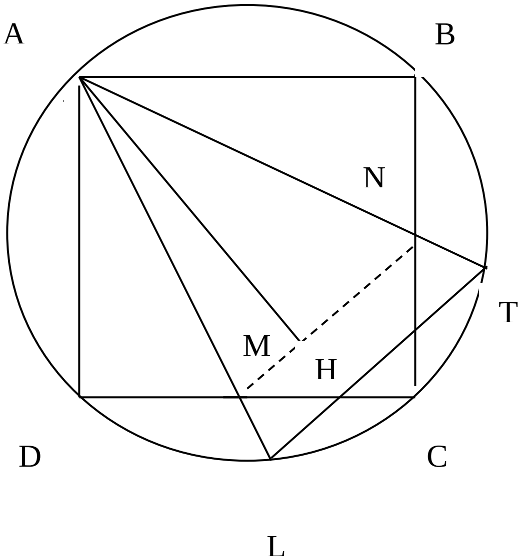
Խնդիր 8. $ABCD$ քառակուսուն արտագծենք շրջանագիծ : AM և AN ճառագայթների և շրջանագծի հետ հատման կետերը նշանակենք համապատասխանաբար L և T (տես նկ 5): Ցույց տանք, որ MN և LT ուղիղները զուգահեռ են:

Տանենք $AH \perp MN$: Կարող ենք գրել

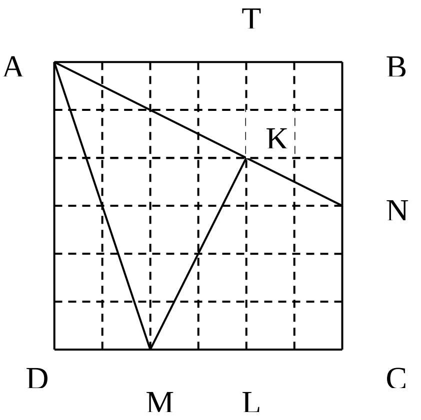
$$\angle ATL = \frac{\cup AC - \cup CL}{2} = \frac{90 + \cup CT}{2} = \angle BNA = \angle ANM$$, ուստի $TL \parallel NM$:

Խնդիր 9. Դիցուք M և N կետերը գտնվում են համապատասխանաբար DC և BC կողմերի վրա այնպես, որ $CM = 2MD$ և $BN = NC$: Ապացուցենք, որ $\angle MAN = 45^\circ$:

$ABCD$ քառակուսին բաժանենք 36 հավասար քառակուսիների, ինչպես ցույց է տրված նկ 6-ում: Այդ դեպքում դժվար չէ նկատել, որ $\Delta ATK = \Delta MLK$, որտեղից կստանանք $MK = AK$: Մյուս կողմից ունենք $\angle AKT + \angle MKL = 90^\circ$, ուրեմն $\angle AKM = 90^\circ$: Այսպիսով AKM -ն հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուն է, հետևաբար $\angle MAN = 45^\circ$:



նկ. 5

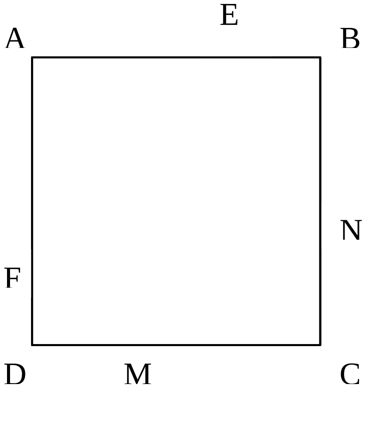


նկ. 6

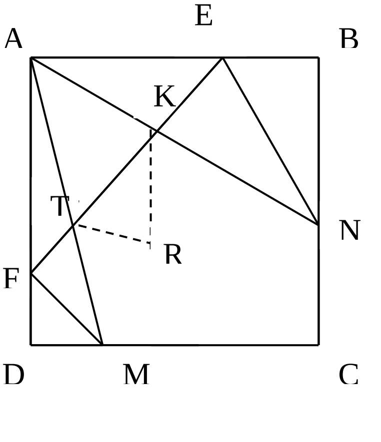
Խնդիր 10. Կատարենք հետևյալ լրացուցիչ կառուցումները. M և N կետերից տանենք զուգահեռ ուղիղներ համապատասխանաբար AN և AM ուղիղներին՝ $MF \parallel AN$ և $EN \parallel AM$ (նկ 7) :

Ցույց տանք, որ $AE = AF$, կամ որ նույնն է $BE = DF$: Որպես զուգահեռ ուղիղներով կազմված անկյուններ $\angle BNE = \angle MAD$ և $\angle BAN = \angle FMD$, ուրեմն կարող ենք ասել, որ $\Delta BNE \sim \Delta MAD$ և $\Delta BAN \sim \Delta FMD$:

Այսպիսով $\frac{EB}{BN} = \frac{MD}{AD}$ և $\frac{BN}{AB} = \frac{FD}{MD}$: Քանի որ $AB = AD$, ապա կստանանք $BE = DF$ և $AE = AF$:



նկ. 7



նկ. 8

Խնդիր 11. Ապացուցել, որ տեղի ունի $EN^2 + AM^2 = AN^2 + MF^2$ հավասարությունը:

Իրոք, օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից կարող ենք գրել $EN^2 + AM^2 = BE^2 + BN^2 + AD^2 + MD^2$ և

$AN^2 + MF^2 = AB^2 + BN^2 + FD^2 + MD^2$: Քանի որ $AB = AD$ և $EB = FD$, ապա կստանանք $EN^2 + AM^2 = AN^2 + MF^2$:

Խնդիր 12. Ցույց տալ, որ A, E, N, M և F կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա, ինչպես նաև՝ տեղի ունի $AE = AF = MN$:

Քանի որ $\angle AMF = \angle FEA = 45^\circ$,ուրեմն A, E, M և F կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Հանգունորեն կստանանք , որ A, M, F և N կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա: Այսպիսով A, E, M, N և F կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա, բայց քանի որ $AEMN$-ն սեղան է, ապա այն հավասարասրուն է, այսինքն $AE = MN$:

Խնդիր 13. Ապացուցել, որ $KT^2 = EK^2 + TF^2$:

Կառուցենք E կետի համաչափ R կետը AN ուղղի նկատմամբ: Պարզ է, որ այդ կետը կլինի նաև F կետի համաչափ կետը AM ուղղի նկատմամբ: Դժվար չէ նկատել, որ այդ դեպքում $EK = KR, RT = TF$ և KRT եռանկյունը ուղղանկյուն եռակյուն է: Այսպիսով կարող ենք գրել $KT^2 = RK^2 + RT^2$ կամ $KT^2 = EK^2 + TF^2$, ինչ որ պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 14. Ապացուցել, որ AKT եռանկյան մակերեսը հավասար է ENK և TMF եռանկյունների մակերեսների գումարին: Նախ նկատենք, որ այդ երեք եռանկյունները իրար նման են: Կարող ենք գրել $S_{ENK} = \left(\frac{EK}{KT}\right)^2 S_{AKT}$,

$S_{TMF} = \left(\frac{TF}{KT}\right)^2 S_{AKT}$: Գումարելով այս երկու հավասարությունները և հաշվի առնելով նախորդ խնդրի արդյունքը, կստանանք $S_{AKT} = S_{ENK} + S_{TMF}$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. ôèçèêî-ìàòåìàòè÷åñêèé æóðíàë äëÿ øêîëüíèêîâ è ñòóäåíòîâ. Êâàíò, 2003, N 3:

2. . ôèçèêî-ìàòåìàòè÷åñêèé æóðíàë äëÿ øêîëüíèêîâ è ñòóäåíòîâ. Êâàíò, 2007, N 4: